Tema 11

Integrales de línea complejas

11.1 Integrales de línea

11.1.1 Funciones complejas de variable real

Una función compleja de variable real lleva asociada una función vectorial de variable real, por lo que las definiciones y resultados para funciones vectoriales de variable real se trasladan inmediatamente a las funciones complejas de variable real gracias a la identificación $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Por otra parte, los resultados para funciones complejas en general, son válidos también para estas funciones.

Así pues, nos limitaremos a recordar un par de definiciones adaptadas a la notación compleja:

Definición 11.1 – *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto. Una función $f\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$, con $f = f_1 + \mathtt{i} f_2$, es* derivable *en un punto $t \in A$ cuando f_1 y f_2 son derivables en t y, en este caso,*

$$f'(t) = f_1'(t) + \mathtt{i} f_2'(t).$$

Definición 11.2 – *Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Una función $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, con $f = f_1 + \mathtt{i} f_2$, es* integrable *en $[a,b]$ cuando f_1 y f_2 son integrables en $[a,b]$ y, en este caso,*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt + \mathtt{i}\int_a^b f_2(t)\,dt.$$

Propiedades 11.3 – *Si $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ son integrables en $[a,b]$ y $w_0 \in \mathbb{C}$, son ciertas las siguientes propiedades:*

a) $f+g$ *es integrable y* $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

b) $w_0 f$ *es integrable y* $\displaystyle\int_a^b w_0 f = w_0 \int_a^b f$.

c) Si $a < c < b$, f *es integrable en* $[a,c]$ *y* $[c,b]$ *y* $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

d) $|f|$ *es integrable y* $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Demostración:

a) b) y c) son inmediatas.

d) Si f es integrable en $[a,b]$, sea $\displaystyle\int_a^b f = w \in \mathbb{C}$. Como $w = |w|e^{\mathtt{i}\theta}$, con $\theta = \operatorname{Arg}(w)$, se tiene que $we^{-\mathtt{i}\theta} = |w|$. Luego

$$\left|\int_a^b f\right| = |w| = we^{-\mathtt{i}\theta} = e^{-\mathtt{i}\theta}\int_a^b f = \int_a^b e^{-\mathtt{i}\theta} f = \int_a^b Re(e^{-\mathtt{i}\theta} f) + \mathtt{i}\int_a^b Im(e^{-\mathtt{i}\theta} f)$$

como $Im(|w|) = 0$, se tiene que $\displaystyle\int_a^b Im(e^{-\mathtt{i}\theta} f) = 0$ y, por tanto,

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b Re(e^{-\mathtt{i}\theta} f) = \left|\int_a^b Re(e^{-\mathtt{i}\theta} f)\right| \leq \int_a^b |\,Re(e^{-\mathtt{i}\theta} f)| \leq \int_a^b |e^{-\mathtt{i}\theta} f|$$
$$= \int_a^b |e^{-\mathtt{i}\theta}||f| = \int_a^b 1|f| = \int_a^b |f|. \qquad \blacksquare$$

11.1.2 Integrales de línea complejas

Definición 11.4 – *Un* **camino** *en* $\mathbb{C}$ *es una función continua* $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$.

Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, *el camino se llama* **cerrado**.

Un camino $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *se dice* **regular** *cuando tiene derivada continua y distinta de cero en todo punto de* $[a,b]$.

Un camino $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *se dice* **regular a trozos** *cuando el intervalo* $[a,b]$ *puede descomponerse en un número finito de subintervalos de manera que la restricción de* γ *a cada uno de ellos sea un camino regular.*

La **longitud** *de un camino regular a trozos* $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *es, por definición,*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Definición 11.5 – *Sean* $I = [a,b]$, $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ *un camino regular a trozos y* $f\colon \gamma(I) \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función continua. La* **integral de línea** *de* f *a lo largo de* γ *se designa por* $\displaystyle\int_\gamma f$ *ó* $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ *y está definida por*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Observación 11.6 – Si $f = u + \mathtt{i}v$ y $\gamma = \gamma_1 + \mathtt{i}\gamma_2$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b \Big(u(\gamma(t)) + \mathtt{i}v(\gamma(t))\Big)\Big(\gamma_1'(t) + \mathtt{i}\gamma_2'(t)\Big)\,dt \\
&= \int_a^b \Big(u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)\Big)\,dt + \mathtt{i}\int_a^b \Big(v(\gamma(t))\gamma_1'(t) + u(\gamma(t))\gamma_2'(t)\Big)\,dt \\
&= \int_a^b \Big(u(\boldsymbol{\gamma}(t)), -v(\boldsymbol{\gamma}(t)\Big)\cdot\Big(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\Big)\,dt + \mathtt{i}\int_a^b \Big(v(\boldsymbol{\gamma}(t)), u(\boldsymbol{\gamma}(t)\Big)\cdot\Big(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\Big)\,dt
\end{aligned}$$

haciendo $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\boldsymbol{F}_1 = (u, -v)$ y $\boldsymbol{F}_2 = (v, u)$, nos queda

$$= \int_a^b \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{\gamma}(t))\cdot\boldsymbol{\gamma}'(t)\,dt + \mathtt{i}\int_a^b \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{\gamma}(t))\cdot\boldsymbol{\gamma}'(t)\,dt = \int \boldsymbol{F}_1\,d\boldsymbol{\gamma} + \mathtt{i}\int \boldsymbol{F}_2\,d\boldsymbol{\gamma}.$$

Luego la integral de línea compleja se construye como las integrales de línea reales de las funciones $\boldsymbol{F}_1$ y $\boldsymbol{F}_2$ sobre el camino $\boldsymbol{\gamma}$ de $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 11.7 –

a) Sean $a \in \mathbb{C}$ y r un número real positivo. El camino $\gamma\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ definido mediante $\gamma(t) = a + re^{\mathtt{i}t}$, para cada $t \in [0, 2\pi]$, es regular y su imagen es la circunferencia de centro a y de radio r (recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj). Su longitud es

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\mathtt{i}re^{\mathtt{i}t}|\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r$$

y si $f\colon \gamma(I) \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(a+re^{\mathtt{it}})r\mathtt{i}e^{\mathtt{it}}\,dt = r\mathtt{i}\int_0^{2\pi} e^{\mathtt{it}}f(a+re^{\mathtt{it}})\,dt.$$

b) Sean z_0 y w_0 dos números complejos. El camino $\gamma\colon[0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por la expresión $\gamma(t) = z_0+t(w_0-z_0)$, es regular y su imagen es el segmento de extremos z_0 y w_0 (recorrido desde z_0 hasta w_0). Suele designarse por $[\![z_0, w_0]\!]$, y su longitud es

$$L(\gamma) = \int_0^1 |w_0 - z_0|\,dt = |w_0 - z_0|$$

y si $f\colon \gamma(I) \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(z_0+t(w_0-z_0))(w_0-z_0)\,dt = (w_0-z_0)\int_0^1 f(z_0+t(w_0-z_0))\,dt.$$

Propiedades 11.8 – *Sean $I=[a,b]$, $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino regular a trozos, $f,g\colon\gamma(I) \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas. $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$. Entonces,*

a) Para todos $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$,

$$\int_\gamma \Big(\lambda f(z)+\mu g(z)\Big)\,dz = \lambda\int_\gamma f(z)\,dz + \mu\int_\gamma g(z)\,dz.$$

b) Si $a\le c\le b$ y γ_1 y γ_2 las restricciones de γ a los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente, se tiene que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

c) Si $|f(z)|\le M$, para todo $z\in\gamma(I)$, se tiene que

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)||dz| \le ML(\gamma),$$

donde denotamos $|dz| = |\gamma'(t)|\,dt$, es decir, $\displaystyle\int_\gamma |f(z)||dz| = \int_I |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt$.

<u>Demostración:</u>

a) y b) se comprueban fácilmente.

c) $$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| &= \left|\int_I f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right| \le \int_I |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt = \int_I |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \\ &\le \int_I M|\gamma'(t)|dt = M\int_I|\gamma'(t)|dt = ML(\gamma).\end{aligned}$$

■

Definición 11.9 – *Dos caminos $\gamma\colon[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\beta\colon[c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ se dicen* **equivalentes** *cuando existe una aplicación suprayectiva $u\colon[c,d] \longrightarrow [a,b]$ con derivada continua y distinta de cero y tal que $\beta=\gamma\circ u$. Si $u'(t)>0$ para todo t, se dice que γ y β son* ***positivamente equivalentes****; y si $u'(t)<0$, se dice que son* **negativamente equivalentes***.*

Proposición 11.10 – *Sea $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino regular a trozos y sea $\beta\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ un camino equivalente a γ. Entonces, para toda función continua f se tiene*

$$\int_\beta f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$$

si γ y β son positivamente equivalentes, mientras que

$$\int_\beta f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

si γ y β son negativamente equivalentes.

Demostración:

Cierto, por serlo para las integrales de línea reales. ■

Proposición 11.11 – *Sean $I=[a,b]$, A un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y f una función analítica en A. Si $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{C}$ es un camino regular a trozos tal que $\gamma(I) \subseteq A$ entonces*

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particular, si γ es cerrado, de tiene que $\displaystyle\int_\gamma f'(z)\,dz = 0$.

Demostración:

Podemos considerar γ regular, pues si no lo es basta dividir la integral en una suma finita de integrales en cada una de las cuales se verifica el resultado.

Sea $g = g_1 + \mathtt{i}g_2\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(t) = f(\gamma(t))$. Como γ es regular y f analítica, g es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y $g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Luego

$$\begin{aligned}\int_\gamma f'(z)\,dz &= \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b g'(t)\,dt = \int_a^b g_1'(t)\,dt + \mathtt{i}\int_a^b g_2'(t)\,dt = g_1(t)\Big]_a^b + \mathtt{i}g_2(t)\Big]_a^b \\ &= g_1(b) - g_1(a) + \mathtt{i}\Big(g_2(b) - g_2(a)\Big) = \Big(g_1(b) + \mathtt{i}g_2(b)\Big) - \Big(g_1(a) + \mathtt{i}g_2(a)\Big) \\ &= g(b) - g(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).\end{aligned}$$

■

Ejemplo 11.12 – Sea $f(z) = z^n$, para $n \in \mathbb{Z}$.

- ◇ Si $n = 0,1,2,\dots$, la función $f(z)$ es la derivada de $g(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ en $\mathbb{C}$, luego para todo camino γ regular a trozos que una z_1 con z_2, se verifica que

$$\int_\gamma z^n\,dz = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1}; \qquad \text{y, si } z_1 = z_2\text{, entonces} \qquad \int_\gamma z^n\,dz = 0.$$

- ◇ Si $n = -2,-3,-4,\dots$, la función $f(z)$ es la derivada de $g(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$, luego para todo camino γ regular a trozos que una z_1 con z_2 y que no pase por el origen, se verifica que

$$\int_\gamma z^n\,dz = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1}; \qquad \text{y, si } z_1 = z_2\text{, entonces} \qquad \int_\gamma z^n\,dz = 0.$$

  Observar que si γ pasa por el origen, la función $f(z) = \frac{1}{z^{-n}}$ no es integrable en la curva y no tiene sentido la integral.

◇ Si $n=-1$, la función $f(z)=\frac{1}{z}$ es la derivada de $\operatorname{Log}(z)$ en $\mathbb{C}-A_0$ (el semieje real negativo), luego para todo camino γ regular a trozos que una z_1 con z_2 y que no pase por el conjunto A_0, se verifica que

$$\int_\gamma z^{-1}\,dz=\operatorname{Log}(z_2)-\operatorname{Log}(z_1);\qquad \text{y, si } z_1=z_2,\text{ entonces}\qquad \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz=0.$$

Si γ pasa por el origen, la función $f(z)=\frac{1}{z}$ no es integrable en la curva y no tiene sentido la integral; sin embargo, si la curva pasa por $A_0-\{0\}$, la integral tiene sentido, aunque no puede aplicarse el resultado anterior.

Por ejemplo, si $\gamma(\theta)=re^{\mathtt{i}\theta}$ es la parametrización de una circunferencia de radio r que rodea al origen,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{r\mathtt{i}e^{\mathtt{i}\theta}}{re^{\mathtt{i}\theta}}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\mathtt{i}\,d\theta=2\pi\mathtt{i}.$$

De hecho, esto puede generalizarse a cualquier camino cerrado γ sin más que tener en cuenta que, por la observación 11.6, la integral se puede escribir mediante dos integrales de línea reales

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}=\int_{\boldsymbol{\gamma}}(u,-v)\,d\boldsymbol{\gamma}+\mathtt{i}\int_{\boldsymbol{\gamma}}(v,u)\,d\boldsymbol{\gamma};$$

y, como $(u,-v)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ y $(v,u)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ son las funciones que aparecen, respectivamente, en el ejercicio propuesto 3.7 y en el ejercicio resuelto 3.48, sobre el teorema de Green, aplicando los resultados que allí se obtienen:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}=\int_{\boldsymbol{\gamma}}(u,-v)\,d\boldsymbol{\gamma}+\mathtt{i}\int_{\boldsymbol{\gamma}}(v,u)\,d\boldsymbol{\gamma}=n0+\mathtt{i}2n\pi=2n\pi\mathtt{i},$$

donde n indica el número de vueltas que da la curva γ alrededor del origen.

11.2 Teoremas de Cauchy-Goursat

Sea (a,b,c) una terna de números complejos distintos. Designaremos por $T(a,b,c)$ el triángulo de vértices a, b y c y por ∂T su contorno que está formado por los tres segmentos $[\![a,b]\!]$, $[\![b,c]\!]$ y $[\![c,a]\!]$.

Teorema de Cauchy-Goursat para un triángulo 11.13 – *Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $p\in A$, $f\colon A\longrightarrow\mathbb{C}$ una función continua en A y analítica en $A-\{p\}$. Entonces para todo tiángulo T contenido en A se verifica*

$$\int_{\partial T} f(z)dz=0.$$

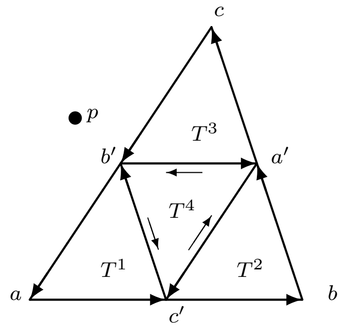
<u>#Demostración#</u>

Haremos la demostración separándolo en tres casos:

<u>Caso 1:</u> Supongamos en primer lugar que $p\notin T$ y descompongamos el triángulo $T(a,b,c)$ en los cuatro triángulos $T^1(a,c',b')$, $T^2(b,a',c')$, $T^3(c,b',a')$ y $T^4(a',b',c')$, donde a', b' y c' son los puntos medios de los segmentos $[\![b,c]\!]$, $[\![c,a]\!]$ y $[\![a,b]\!]$ respectivamente.

Es claro que

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial T^k} f(z)\,dz$$



pues, al hacer la integral en ∂T^4, sus lados se recorren en sentido contrario a como se recorren cuando forman parte de los otros triángulos. Entonces, si designamos por T_1 a uno de los triángulos T^k para el que la integral correspondiente tiene módulo mayor o igual que el de las otras tres, se tiene que

$$\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right| \le 4\left|\int_{\partial T_1} f(z)\,dz\right|, \qquad \text{donde} \qquad L(\partial T_1) = \frac{L(\partial T)}{2}.$$

Descomponiendo ahora el triángulo T_1 en otros cuatro triángulos mediante los puntos medios de sus lados y repitiendo el razonamiento anterior, se obtiene otro triángulo T_2 para el que

$$\left|\int_{\partial T_1} f(z)\,dz\right| \le 4\left|\int_{\partial T_2} f(z)\,dz\right|, \qquad \text{donde} \qquad L(\partial T_2) = \frac{L(\partial T_1)}{2} = \frac{L(\partial T)}{2^2}.$$

Continuando el proceso, se obtiene una sucesión de triángulos $T \supset T_1 \supset T_2 \supset \cdots \supset T_n \supset \cdots$ con, llamando $L = L(\partial T)$, longitudes de los perímetros $L(\partial T_n) = \frac{L}{2^n}$ y verificando que

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \le 4^n \left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right|.$$

Entonces, si T_n es el triángulo $T_n(a_n, b_n, c_n)$, se tiene que

$$L(\partial T_n) = |a_n - b_n| + |b_n - c_n| + |c_n - a_n| = \frac{L}{2^n},$$

luego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = z_0$ y, en consecuencia, existe un único punto z_0 perteneciente a todos los triángulos de la sucesión. Como f es derivable en z_0, puede escribirse

$$f(z) = f(z_0)+(z-z_0)\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right)+(z-z_0)f'(z_0) = f(z_0)+(z-z_0)\varphi(z)+(z-z_0)f'(z_0)$$

donde $\varphi(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$. Entonces,

$$\int_{\partial T_n} f(z)\,dz = f(z_0)\int_{\partial T_n} dz + \int_{\partial T_n} (z-z_0)\varphi(z)\,dz + f'(z_0)\int_{\partial T_n} (z-z_0)\,dz$$

y, como el primer y tercer sumandos son nulos (ejemplo 11.12),

$$\left|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial T_n} (z-z_0)\varphi(z)\,dz\right| \le \int_{\partial T_n} |z-z_0||\varphi(z)||dz|.$$

Pero $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) = 0$, luego para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|\varphi(z)| < \varepsilon$ cuando $|z-z_0| < \delta$. Además, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|z-z_0| < \delta$ para todo $z \in T_n$, luego también se verifica que $|z-z_0| < \frac{L}{2^n}$ para todo $z \in T_n$. Entonces

$$\left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right| \le \int_{\partial T_n} |z-z_0||\varphi(z)||dz| \le \frac{L^2}{4^n}\varepsilon$$

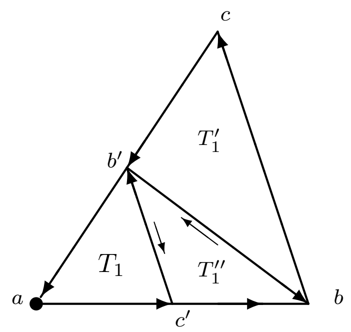
y, por tanto,

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| \le 4^n \left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right| \le L^2\varepsilon$$

y como ε es arbitrario, $\displaystyle\int_{\partial T_n} f(z)dz = 0$.

Caso 2: Supongamos ahora que p es un vértice de T, por ejemplo, $p = a$. Si a, b y c están en línea recta, es evidente que la integral es nula. En otro caso, elijamos $c' \in [\![a,b]\!]$ y $b' \in [\![a,c]\!]$ los puntos medios de los segmentos y los triángulos de vértices $T_1(a,c',b')$, $T_1'(c',b,b')$ y $T_1''(b,c,b')$. Entonces

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T_1} f(z)dz + \int_{\partial T_1'} f(z)dz + \int_{\partial T_1''} f(z)dz,$$

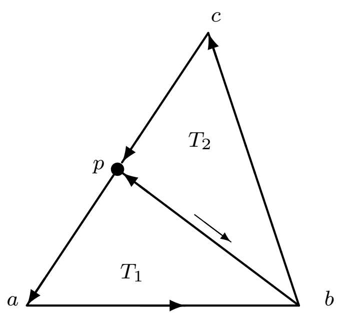


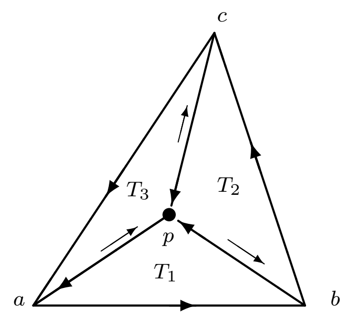
pero como los dos últimos triángulos no contienen a p, por el caso anterior, sus integrales son nulas. Procediendo como en el Caso 1, se construye una sucesión de triángulos T_n, con $L(\partial T_n) = \frac{L}{2^n}$, verificandose que

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial T_n} f(z)dz\right| \leq \sup_{z\in T}|f(z)|\frac{L}{2^n}$$

luego también la primera integral es nula.

Caso 3: Si p está sobre el perímetro o en el interior de T, basta dividir T en triángulos con un vértice en p y aplicar el Caso 2. Es decir, como en las figuras siguientes:





$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{2} \int_{\partial T^k} f(z)\,dz = 0; \qquad \int_{\partial T} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{3} \int_{\partial T^k} f(z)\,dz = 0.$$

Por consiguiente, para cualquier T, se tiene que $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$. ■

Teorema de Cauchy-Goursat para un abierto convexo 11.14 – *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto y convexo, $p \in A$ y $f\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en A y analítica en $A - \{p\}$. Entonces, para todo camino cerrado regular a trozos y contenido en A se verifica que*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

#Demostración#

Sea $a \in A$. Como A es convexo, para cada $z \in A$ el segmento $[\![a,z]\!]$ está contenido en A y, por tanto, podemos construir la función $F\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = \int_{[\![a,z]\!]} f(w)\,dw.$$

Si probamos que $F'(z) = f(z)$, para todo $z \in A$, entonces, por la proposición 11.11,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma F'(z)\,dz = 0.$$

En efecto. Sea z_0 un punto cualquiera de A. Entonces,

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)=\frac{1}{z-z_0}\left(\int_{[\![a,z]\!]}f(w)\,dw-\int_{[\![a,z_0]\!]}f(w)\,dw-(z-z_0)f(z_0)\right)$$

como $\displaystyle\int_{[\![a,z]\!]}f(w)\,dw=-\int_{[\![z,a]\!]}f(w)\,dw$ y agrupando las dos integrales, nos queda

$$=\frac{1}{z-z_0}\left(-\int_{[\![z,a]\!]\sqcup[\![a,z_0]\!]}f(w)\,dw-(z-z_0)f(z_0)\right)$$

y como $[\![z,a]\!]\sqcup[\![a,z_0]\!]$ son dos de los tres lados del triángulo $T(z,a,z_0)$ (contenido en A por ser A convexo), por la proposición anterior,

$$=\frac{1}{z-z_0}\left(\int_{[\![z_0,z]\!]}f(w)\,dw-(z-z_0)f(z_0)\right)$$

usando ahora que $\displaystyle\int_{[\![z_0,z]\!]}dw=(z-z_0)$, nos queda

$$=\frac{1}{z-z_0}\left(\int_{[\![z_0,z]\!]}f(w)\,dw-f(z_0)\int_{[\![z_0,z]\!]}dw\right)$$

$$=\frac{1}{z-z_0}\int_{[\![z_0,z]\!]}\Big(f(w)-f(z_0)\Big)\,dw.$$

Ahora bien, como f es continua en z_0, para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que si $|w-z_0|<\delta$ entonces $|f(w)-f(z_0)|<\varepsilon$. Pero como, si $|z-z_0|<\delta$, también se verifica que $|w-z_0|<\delta$ para cada $w\in[\![z_0,z]\!]$, entonces

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right|\leq\left|\frac{1}{z-z_0}\right|\int_{[\![z_0,z]\!]}|f(w)-f(z_0)||dw|<\left|\frac{1}{z-z_0}\right|\int_{[\![z_0,z]\!]}\varepsilon|dw|=\varepsilon,$$

si $|z-z_0|<\delta$ y, en consecuencia, $F'(z_0)=f(z_0)$ para todo $z_0\in A$. ■

11.3 Fórmula integral de Cauchy

Definición 11.15 – *Sean $I=[a,b]$ y $\gamma\colon I\longrightarrow\mathbb{C}$ un camino cerrado regular a trozos. Se llama* **índice de un punto** $z_0\notin\gamma(I)$ *respecto de γ y se designa por $Ind_\gamma(\alpha)$ al número*

$$Ind_\gamma(z_0)=\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_\gamma\frac{dz}{z-z_0}.$$

Observación 11.16 – Como el intervalo $I=[a,b]$ es cerrado y acotado y $\gamma\colon I\longrightarrow\mathbb{C}$ es una función continua, el conjunto $\gamma(I)$ es cerrado y acotado; luego divide al plano complejo en trozos disjuntos, que son las componentes conexas del conjunto $\mathbb{C}-\gamma(I)$. Como $\gamma(I)$ está acotado, existe un entorno E de centro el origen contiene a $\gamma(I)$, y, en consecuencia, el conjunto conexo $\mathbb{C}-E$ está contenido en $\mathbb{C}-\gamma(I)$, luego $\mathbb{C}-E$ está contenido en una componente conexa de $\mathbb{C}-\gamma(I)$. Por consiguiente, entre las componentes conexas de $\mathbb{C}-\gamma(I)$ hay una no acotada.

Proposición 11.17 – *Sean $I=[a,b]$ y $\gamma\colon I\longrightarrow\mathbb{C}$ un camino cerrado regular a trozos, entonces:*

a) *$Ind_\gamma(z_0)\in\mathbb{Z}$, para todo $z_0\in\mathbb{C}-\gamma$.*

b) *La función $Ind_\gamma\colon\mathbb{C}-\gamma(I)\longrightarrow\mathbb{Z}$ es constante en cada una de las componentes conexas de $\mathbb{C}-\gamma(I)$ y es nula en la componente no acotada.*

Demostración:

Si z_0 está en la componente conexa no acotada, γ no encierra a z_0 y, por el tercer caso del ejemplo 11.12, se tiene $\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 0$.

Para otra componente conexa, todos los puntos están rodeados por γ de la misma forma (mismo número k de vueltas) luego para todos ellos,

$$Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}2\pi\mathtt{i}k = k \in \mathbb{Z}.$$

■

Proposición 11.18 – *Sea $\gamma\colon[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ la circunferencia de centro z_0 y radio r recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj. Entonces*

$$Ind_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & si\ |z-z_0| < r \\ 0, & si\ |z-z_0| > r. \end{cases}$$

Demostración:

Es un caso particular de la proposición anterior.

■

Fórmula integral de Cauchy 11.19 – *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto y convexo, y $f\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Entonces, para todo camino cerrado regular a trozos $\gamma\colon[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ contenido en A y para todo $z_0 \in A - \gamma([a,b])$ se verifica*

$$f(z_0)\,Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Demostración:

Sea $z_0 \in \mathbb{C} - \gamma([a,b])$. De la condición de derivación de un cociente se deduce que la función $g\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0), & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

es analítica en $A - \{z_0\}$. Además, g es continua en z_0, puesto que

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) = g(z_0).$$

Por el teorema de Cauchy-Goursat para abiertos convexos se tiene que $\int_\gamma g(z)\,dz = 0$ y, como $z_0 \notin \gamma([a,b])$, resulta

$$0 = \int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz - 2\pi\mathtt{i}f(z_0)\,Ind_\gamma(z_0).$$

■

Corolario 11.20 – *En las condiciones de la proposición anterior, si γ es una circunferencia de centro z_0 recorrida en sentido positivo, entonces la fórmula integral de Cauchy se reduce a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

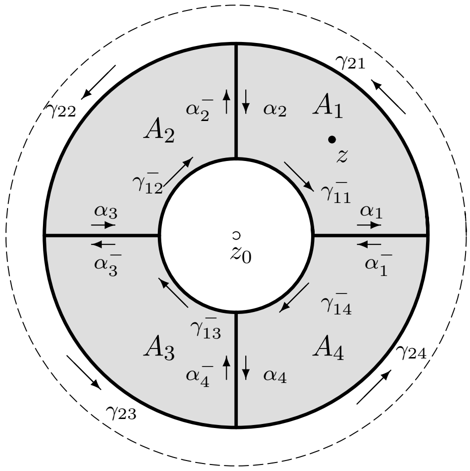
Proposición 11.21 – *Si f es analítica en $E^*(z_0,r)$ y γ_1 y γ_2 son dos circunferencias de centro z_0 y cuyos radios verifican que $0<\rho_1<\rho_2<r$, entonces, para todo z tal que $\rho_1<|z-z_0|<\rho_2$ se verifica que*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw-\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

donde γ_1 y γ_2 se recorren en sentido positivo.

Demostración:

Sea $A=\{z\in\mathbb{C}:\rho_1<|z-z_0|<\rho_2\}$, el anillo circular encerrado por las circunferencias γ_1 y γ_2. Consideremos los segmentos α_1, α_2, α_3 y α_4 que dividen a A en cuatro conjuntos A_1, A_2, A_3 y A_4, de forma que z está en uno de ellos; y consideremos las curvas que rodean dichos conjuntos, como en la figura.



Si denotamos esas curvas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\beta_1&=\gamma_{21}\sqcup\alpha_2\sqcup\gamma_{11}^-\sqcup\alpha_1\\ \beta_2&=\gamma_{22}\sqcup\alpha_3\sqcup\gamma_{12}^-\sqcup\alpha_2^-\\ \beta_3&=\gamma_{23}\sqcup\alpha_4^-\sqcup\gamma_{13}^-\sqcup\alpha_3^-\\ \beta_4&=\gamma_{24}\sqcup\alpha_1^-\sqcup\gamma_{14}^-\sqcup\alpha_4^-\end{aligned}$$

se verifica que

$$\sum_{k=1}^{4}\int_{\beta_k}\frac{f(w)}{w-z}dw=\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw-\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Ahora bien, como cada uno de los A_k puede meterse en un abierto convexo contenido en $E^*(z_0,r)$, aplicando la fórmula integral de Cauchy a cada una de ellas, se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw-\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw&=\sum_{k=1}^{4}\int_{\beta_k}\frac{f(w)}{w-z}dw=\sum_{k=1}^{4}2\pi\mathtt{i}f(z)\,Ind_{\beta_k}(z)\\ &=2\pi\mathtt{i}\Big(f(z)+0+0+0\Big)=2\pi\mathtt{i}f(z),\end{aligned}$$

pues $Ind_{\beta_k}(z)=1$ si $z\in A_k$ y 0 si $z\notin A_k$, obteniendose el resultado propuesto. ■

11.4 Desarrollo de una función analítica en serie de potencias

Teorema de Taylor 11.22 – *Sean $A\subseteq\mathbb{C}$ abierto y $f\colon A\longrightarrow\mathbb{C}$ una función analítica. Para cada entorno $E(z_0,r)$ contenido en A existe un desarrollo en serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, con radio de convergencia mayor o igual que r, tal que $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, para todo $z\in E(z_0,r)$. Los coeficientes de este desarrollo vienen dados por*

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad \text{para } n=0,1,2,\dots,$$

donde γ es cualquier circunferencia de centro z_0 y radio $\rho<r$, recorrida en sentido positivo.

Demostración:

Sea $z_0\in A$ y $E(z_0,r)\subseteq A$. Sea $z\in E(z_0,r)$ y consideremos γ una circunferencia de centro z_0 y radio $\rho<r$ que encierre a z. Es decir, el conjunto $\gamma=\{w\in\mathbb{C}:|z-z_0|<|w-z_0|=\rho<r\}$.

Por la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathtt{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Veamos que para todo w, $\frac{1}{w-z}$ puede expresarse como una serie de potencias. como $w - z_0 \neq 0$ para todo $w \in \gamma$, se tiene

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-z)\frac{w-z_0}{w-z_0}} = \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{\frac{w-z}{w-z_0}} = \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{\frac{w-z_0+z_0-z}{w-z_0}} = \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}$$

como $|z - z_0| < |w - z_0|$, se tiene que $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$ y, por tanto, que

$$= \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w-z_0} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n.$$

Además, f es continua en A luego existe $M > 0$ tal que $|f(w)| < M$ para todo $w \in \gamma$, luego $\left|\frac{f(w)}{w-z_0}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\right| \leq \frac{M}{\rho}\left|\frac{z-z_0}{\rho}\right|^n$, para todo $w \in \gamma$, y, en consecuencia, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w-z_0}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$ converge uniformemente en γ.

Entonces,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathtt{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}} \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w-z_0} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi\mathtt{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n\, dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathtt{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \right) (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \end{aligned}$$

y $a_n = \dfrac{1}{2\pi\mathtt{i}} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw$, donde la circunferencia γ verifica que $|z - z_0| < \rho$. Pero la integral no depende del z elegido y su valor es el mismo para cualquier circunferencia, luego

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw$$

para cualquier circunferencia γ contenida en $E(z_0, r)$. ∎

Corolario 11.23 – *Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Entonces f tiene derivadas de todos los órdenes en cada punto de A.*

Demostración:

La función suma de una serie de potencias tiene derivadas de todos los órdenes. ∎

Corolario 11.24 – *Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f\colon A \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Entonces, para cada $z_0 \in A$ se verifica*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathtt{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde γ es cualquier circunferencia de centro z_0 contenida en A, recorrida en sentido positivo.

Demostración:

Por la proposición anterior, existe un círculo abierto $E(z_0,r) \subseteq A$ tal que, para todo $z \in E(z_0,r)$ se verifica que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \text{siendo} \quad a_n = \frac{1}{2\pi \mathtt{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad \text{para } n = 0,1,2,\ldots,$$

y γ es cualquier circunferencia de centro z_0 y radio $\rho < r$. Ahora bién, como $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, se tiene que

$$f^{(n)}(z_0) = n!a_n = \frac{n!}{2\pi \mathtt{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad \text{para } n = 0,1,2,\ldots. \qquad \blacksquare$$

Corolario 11.25 – *Sean f y g analíticas en $E(z_0,r)$, con $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Si $g'(z_0) \neq 0$, entonces*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Demostración:

Como f y g son analíticas en $E(z_0,r)$ y $f(z_0) = g(z_0) = 0$, en ese entorno pueden expresarse por $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ y $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$. Luego

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{n-1}} = \lim_{z\to z_0} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-1}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{n-1}} = \frac{a_1}{b_1} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}. \qquad \blacksquare$$

De las fórmulas integrales para las derivadas sucesivas de una función analítica resultan inmediatamente las llamadas desigualdades de Cauchy:

Lema 11.26 – *Si f es una función analítica en el entorno $E(z_0,r)$ y $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in E(z_0,r)$, entonces*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}, \ n = 0,1,2,\ldots$$

Demostración:

Sea γ la circunferencia definida por $\gamma(t) = z_0 + \rho e^{\mathtt{i}t}$, $t \in [0,2\pi]$, donde $\rho < r$. Entonces, para $n = 0,1,2,\ldots$, se tiene

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathtt{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{n!}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho e^{\mathtt{i}t})}{e^{\mathtt{i}nt}} dt$$

y, por tanto,

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{\mathtt{i}t})| dt \leq \frac{n!M}{\rho^n}$$

y como se cumple para todo $\rho < r$,

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \inf_{\rho<r} \frac{n!M}{\rho^n} = \frac{n!M}{r^n}, \quad \text{para } n = 0,1,2,\ldots \qquad \blacksquare$$

Teorema de Liouville 11.27 – *Si f es una función entera y acotada, entonces f es constante.*

Demostración:

Como f es analítica en $\mathbb{C}$, para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ existe un desarrollo en serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ con radio de convergencia infinito cuya suma coincide con $f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y, por las desigualdades de Cauchy, para $n = 1, 2, \ldots,$

$$|a_n| = \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| \leq \frac{M}{r^n},$$

para todo $r > 0$, luego $a_n = 0$ para $n = 1, 2, ...$ y, por tanto, $f(z) = a_0$. ■

Teorema fundamental del Álgebra 11.28 – *Todo polinomio no constante $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ con coeficientes complejos y $a_n \neq 0$, tiene al menos una raiz en $\mathbb{C}$.*

Demostración:

Si $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces la función $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es analítica en $\mathbb{C}$. Además, como

$$\begin{aligned} \lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{1}{P(z)}\right| &= \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|P(z)|} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n|} \\ &= \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|z|^n \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n\right|} \\ &= \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|z|^n} \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n\right|} = 0 \frac{1}{|a_n|} = 0 \end{aligned}$$

se tiene que $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{P(z)} = 0$ y para cada para cada $\varepsilon > 0$ existe un $K > 0$ tal que $\frac{1}{|P(z)|} < \varepsilon$ para $|z| > K$, es decir, la función $\frac{1}{P(z)}$ está acotada fuera del entorno cerrado $\overline{E}(0, K)$; y por ser continua también está acotada en $\overline{E}(0, K)$ luego está acotada en $\mathbb{C}$. En consecuencia, es una función analítica y acotada en todo el plano y, por el teorema de Liouville, es una función constante, lo que es absurdo. ■

11.5 Ejercicios

Calcular las integrales $\int_\gamma f(z)\, dz$, para los siguientes casos:

11.1 $f(z) = e^{|z|^2}\, Re(z)$ y γ el segmento $[\![0, 1+\mathtt{i}]\!]$.

11.2 $f(z) = \cos z$ y γ el segmento $[\![\frac{\pi}{2}, \pi+\mathtt{i}]\!]$.

11.3 $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ y γ la semicircunferencia $|z| = 1$ con $Im(z) \geq 0$. Para $\sqrt{z}$, se toma la rama de la función para la cual es $\sqrt{1} = 1$.

11.4 $f(z) = \frac{e^z \cos(\pi z)}{z^2+2z}$ y γ es la circunferencia $|z| = 1$ recorrida en sentido positivo.

11.5 $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z \operatorname{sen}(z-1)}{z^2-z}$ y γ la circunferencia $|z| = 2$ recorrida en sentido positivo.

11.6 $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ y γ la circunferencia $|z| = 1$ recorrida en sentido positivo.

11.7 $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} z)}{(z-1)^2(z-3)}$ y γ la circunferencia $|z-1| = 1$ recorrida en sentido positivo.