

Polinomios de Taylor

Hemos visto el uso de la derivada como aproximación de la función (la recta tangente) y como indicadora del comportamiento de la función (monotonía). En este tema veremos las derivadas de órdenes superiores para mejorar estos usos.

Una definición usada cuando se manejan derivadas de órdenes superiores es la siguiente:

Definición 244.- Se dice que f es una función de **clase 1** (o que es \mathcal{C}^1) en x_0 si es derivable en el punto y su derivada es continua en el punto. En general, se dice de **clase m** (o \mathcal{C}^m) si admite derivada hasta orden m y son todas continuas.

Si admite derivadas de cualquier orden y todas son continuas, se dice de **clase ∞** (\mathcal{C}^∞).

EJEMPLOS ★ $f(x) = e^x$ es continua y derivable en \mathbb{R} y su derivada es $f'(x) = e^x$ continua en \mathbb{R} , luego es \mathcal{C}^1 en \mathbb{R} . Como su derivada es ella misma, vuelve a ser derivable y su derivada continua y, sucesivamente, es en realidad de \mathcal{C}^∞ .

★ Los polinomios son de clase ∞ en \mathbb{R} . En efecto, son continuos y derivables, y su derivada es un polinomio, que vuelve a ser continua y derivable, etc.

★ Las funciones *seno* y *coseno* son \mathcal{C}^∞ , pues salvo signos una es la derivada de la otra y son continuas y derivables. \triangle

11.1 Polinomios de Taylor

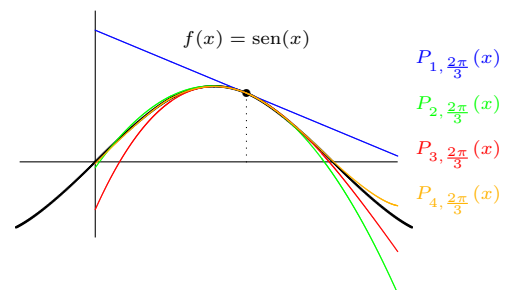
Cuando en el cálculo de límites usamos L'Hôpital o algunos infinitésimos, estamos sustituyendo el comportamiento de la función cerca del punto por el de su recta tangente. Ésta aproximación que usamos, coincide con la función en su valor y el valor de la derivada en el punto; los polinomios de Taylor que construiremos a continuación se toman para que coincida con la función en todas las derivadas.

Definición 245.- Llamaremos **polinomio de Taylor de grado n** para la función f en el punto a , y lo denotaremos por $P_{n,a}$, al polinomio:

$$P_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Los polinomios de Taylor en el punto $a = 0$, suelen denominarse polinomios de McLaurin.

Nota: Observamos que el polinomio de grado 1, $P_{1,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)$ es la recta tangente a f en el punto a , de manera que los polinomios de Taylor serán una especie de “polinomios tangentes” a la función en el punto. Al tener mayor grado que la recta tangente se espera que se parezcan más a la función que ésta, aunque dado que para su construcción únicamente usamos los valores de f y sus derivadas en el punto a , será una aproximación local (cerca de a).



En efecto, para todo $k = 1, \dots, n$, se cumple que $P_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$:

$$P_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$P'_{n,a}(x) = f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

$$P''_{n,a}(x) = f''(a) + \frac{f'''(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-3)!}(x-a)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}$$

$$P'''_{n,a}(x) = f'''(a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-4)!}(x-a)^{n-4} + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-3)!}(x-a)^{n-3}$$

... ..
 $P_{n,a}^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{1!}(x-a)^1$
 $P_{n,a}^{(n)}(x) = f^{(n)}(a)$
 Y sustituyendo, se ve que $P_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, para todo k .

EJEMPLO La función $f(x) = \text{sen } x$ es \mathcal{C}^∞ en \mathbb{R} , y sus derivadas son $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\text{sen } x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$ y $f^{(4)}(x) = \text{sen } x = f(x)$ de nuevo, luego $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$ y se repiten $f^{(4)}(0) = f(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = f'(0) = 1$, etc. Por lo que

$$P_{7,0}(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \frac{-1}{3!}(x-0)^3 + \frac{0}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5 + \frac{0}{6!}(x-0)^6 + \frac{-1}{7!}(x-0)^7 = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

es su polinomio de Taylor de grado 7 en $x = 0$. △

Por la propia construcción de los polinomios de Taylor, resulta evidente el siguiente resultado

Proposición 246.- Si $P(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n de f en a , entonces $P'(x)$ es el polinomio de Taylor de grado $n - 1$ de f' en a .

EJEMPLO La función $f(x) = \cos x$ es la derivada del seno y el polinomio de Taylor de $g(x) = \text{sen } x$ en 0 de grado 7 es $P(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$. Entonces, el polinomio de MacLaurin de grado 6 de $f(x) = \cos x$ en 0, es $P_{6,0} = P'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$. △

Como es habitual, la obtención de polinomios de Taylor se amplía con las operaciones algebraicas básicas:

Propiedades 247.- Sean f y g dos funciones y $P_{n,a}$ y $Q_{n,a}$ los polinomios de Taylor de grado n en a respectivos. Se tiene

- 1.- El polinomio de Taylor de grado n para $f + g$ en a es $P_{n,a} + Q_{n,a}$
- 2.- El polinomio de Taylor de grado n para fg en a es la parte hasta grado n del polinomio producto de $P_{n,a}$ y $Q_{n,a}$.
- 3.- El polinomio de Taylor de grado n para f/g en a se obtiene dividiendo el polinomio $P_{n,a}$ entre el polinomio $Q_{n,a}$, pero ordenados de la potencia menor a la potencia mayor, hasta llegar al grado n en el cociente.

Proposición 248.- Si $P_{n,a}$ es el polinomio de Taylor de grado n para f en a y $Q_{n,f(a)}$ es el polinomio de Taylor de grado n para g en $f(a)$, entonces el polinomio de Taylor de grado n para $g \circ f$ en a se obtiene tomando la parte hasta el grado n del polinomio $Q_{n,f(a)}[P_{n,a}(x)]$, composición de los de f y g .

Nota: La división entre polinomios comenzando por los términos de menor grado a que se hace referencia en el resultado anterior, la vemos ejemplificada a la derecha, dividiendo $1+2x$ entre $1+x^2$. Nos hemos detenido tras obtener 4 términos del cociente, pero se puede dividir tanto como se quiera, mientras el resto no se anule. Puede comprobarse que es cierto que

$$\frac{1+2x}{1+x^2} = 1 + 2x - x^2 - 2x^3 + \frac{x^4 + 2x^5}{1+x^2}$$

$$\begin{array}{r} 1+2x \\ -1 \\ \hline 2x - x^2 \\ -2x \\ \hline -x^2 - 2x^3 \\ x^2 \\ \hline -2x^3 + x^4 \\ 2x^3 \\ \hline x^4 + 2x^5 \end{array} \quad \left| \frac{1+x^2}{1+2x-x^2-2x^3} \right.$$

EJEMPLO Obtener el polinomio de Taylor de grado 3 en 0 de $f(x) = \text{sen } x + \cos x$, $g(x) = \text{sen } x \cos x$ y $h(x) = \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$. Como el polinomio de McLaurin de grado 3 de $\text{sen } x$ es $P(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ y el de $\cos x$ es $Q(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$, se tiene

- ★ $P(x) + Q(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$ es el polinomio de McLaurin de grado 3 de f .
- ★ $P(x)Q(x) = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{2!3!}$, luego $x - \frac{4x^3}{3!}$ es el polinomio de McLaurin de grado 3 de g .

* $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x^2}{2}} = x + \frac{\frac{x^3}{3}}{1 - \frac{x^2}{2}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{\frac{x^5}{6}}{1 - \frac{x^2}{2}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} + \frac{\frac{x^7}{12}}{1 - \frac{x^2}{2}}$, luego $x + \frac{x^3}{3}$ es el polinomio de McLaurin de grado 3 de h . △

EJEMPLO El polinomio de Taylor de grado 4 de $f(x) = x^2$ en 0 es $P(x) = x^2$ y el polinomio de Taylor de grado 4 de $g(x) = e^x$ en $f(0) = 0$ es $Q(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$, luego el polinomio de Taylor de grado 4 de $(g \circ f)(x) = e^{x^2}$ será: la parte hasta grado 4 del polinomio $Q(P(x)) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$, es decir, el polinomio $1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}$. △

Un primer resultado en el sentido de que el polinomio de Taylor es una buena aproximación de la función f en un entorno del punto:

Proposición 249.- Sea f es una función de clase \mathcal{C}^{n-1} en un entorno de a y existe $f^{(n)}(a)$. Sea $P_{n,a}(x)$ el polinomio de Taylor de grado n para la función f en el punto a , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = 0$$

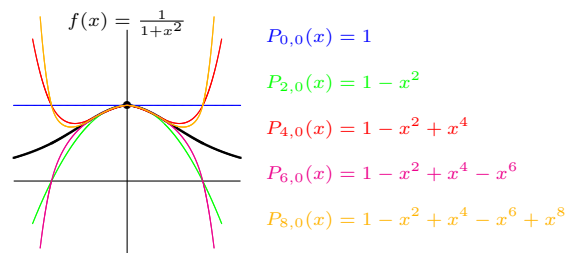
Demostración:

Basta aplicar L'Hôpital sucesivamente al límite siguiente ($n - 1$ veces, que es aplicable por tener la función y el polinomio de Taylor las mismas derivadas en el punto), y tener en cuenta que existe $f^{(n)}(a)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x - a)^n} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - P'_{n,a}(x)}{n(x - a)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x) - P''_{n,a}(x)}{n(n - 1)(x - a)^{n-2}} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - P_{n,a}^{(n-1)}(x)}{n \cdot \dots \cdot 2(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - (f^{(n-1)}(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{1!}(x - a))}{n \cdot \dots \cdot 2(x - a)} \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a} - f^{(n)}(a) \right) = \frac{1}{n!} (f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a)) = 0 \end{aligned}$$

Nota: El resultado nos indica que la diferencia entre $f(x)$ y $P_{n,a}(x)$ se hace pequeña cuando x es cercano a a incluso en comparación con $(x - a)^n$, con lo que los polinomios de Taylor aproximan muy bien a la función, casi puede decirse que “reproducen” la función *cerca del punto*. Por ello, el uso de los polinomios de Taylor en este sentido, es uno de los métodos más sencillos para evaluar funciones de forma aproximada.

Es obvio, que si aumentamos el orden del polinomio se produce una mejor aproximación, no solo porque el valor del polinomio en un punto sea más cercano al valor real de la función (“mejor” aproximación) sino también porque pueden aumentar los puntos para los cuales la aproximación es “buena”. No obstante esto no es lineal, es decir, no por aumentar mucho el grado del polinomio vamos a conseguir una buena aproximación en todo el dominio.



En la figura aneja, podemos ver un ejemplo de lo que estamos diciendo, por mucho que aumentemos el orden de los polinomios de Taylor en $x = 0$ la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ no puede aproximarse para los valores de x fuera de $(-1, 1)$. Por ello, decimos que las aproximaciones de Taylor son aproximaciones *locales*.

11.1.1 Fórmula de Taylor.

Todas estas ideas y comentarios sobre la aproximación de funciones con polinomios quedan de manifiesto con la obtención de la Fórmula de Taylor, que relaciona con igualdad la función y el polinomio de Taylor:

Fórmula de Taylor 250.- Si para una función f existen f' , f'' , ..., $f^{(n)}$ y $f^{(n+1)}$ sobre el intervalo $[a, x]$. Entonces,

$$f(x) - P_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1} \text{ para un cierto } c \in (a, x),$$

llamado *resto de Lagrange*, o también

$$f(x) - P_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n (x - a) \text{ para un cierto } c \in (a, x),$$

que se denomina *resto de Cauchy*. ▷

Corolario 251.- Cualquier polinomio de grado n , $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, se puede escribir como

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

La Fórmula de Taylor y el hecho de que la derivada de orden $n+1$ para un polinomio de grado n es cero, garantiza la igualdad de los dos polinomios del corolario. Pero también, la igualdad propuesta por la Fórmula de Taylor, nos permitirá *sustituir* la función por el polinomio de Taylor en el cálculo de límites; esta *sustitución* amplía el uso de los infinitésimos equivalentes (que son casos simples de los polinomios de Taylor) eliminando la restricción de su uso a los productos y cocientes.

EJEMPLO $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\operatorname{sen}(c)x^4}{4!}) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{\operatorname{sen}(c)x^4}{4!}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{3!} + \frac{\operatorname{sen}(c)x}{4!} = -\frac{1}{6}$ \triangle

Cuando aproximamos el valor real de una función en un punto cercano a a usando el polinomio de Taylor de la función en a , con la Fórmula de Taylor podemos buscar una *cota del error cometido*. En efecto, al tomar como valor de la función el del polinomio, el error cometido será $f(x) - P_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, para algún c entre a y x , y aunque no conocemos el valor c , sí que podemos intentar acotar el valor del resto $|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}| = \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(c)|$.

EJEMPLO Sabemos que $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\operatorname{sen}(c)x^4}{4!}$ cerca de $a = 0$, entonces si decimos que el valor de $\operatorname{sen}(0.4) \approx (0.4) - \frac{(0.4)^3}{3!} = 0.389333$ el error cometido lo podemos acotar con $\frac{|\operatorname{sen}(c)||0.4|^4}{4!} \leq \frac{1 \cdot |0.4|^4}{24} = 0.00106$.

Como sabemos que $\operatorname{sen} x < x$, y como $c \in (0, 0.4)$, es mejor aproximación $\operatorname{sen}(c) < c < 0.4$ que $\operatorname{sen}(c) \leq 1$, luego $|\operatorname{sen}(c)| \frac{|0.4|^4}{4!} < |0.4| \frac{|0.4|^4}{24} = 0.000426$ es una cota del error cometido (el error real cometido es menor que 0.0001). \triangle

11.2 Representación de funciones (2)

Monotonía y extremos locales El siguiente resultado nos ofrece una condición suficiente que caracteriza extremos locales, generalizada al uso de las derivadas de órdenes superiores:

Proposición 252.- Sea f una función de clase \mathcal{C}^{n-1} en un entorno del punto a , para la que se cumple que $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, y además existe $f^{(n)}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, f presenta un mínimo local en a .
- Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, f presenta un máximo local en a .
- Si n es impar y $f^{(n)}(a) > 0$, f es estrictamente creciente en a .
- Si n es impar y $f^{(n)}(a) < 0$, f es estrictamente decreciente en a . \triangleright

EJEMPLO La función $f(x) = x^4$ presenta un mínimo local en 0, pues $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ y $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ siendo $n = 4$ par. Mientras que $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en 0, pues $f'(0) = f''(0) = 0$ y $f'''(0) = 6 > 0$ siendo $n = 3$ impar. \triangle

Concavidad y convexidad

Con la Fórmula de Taylor, la derivada segunda se convierte en la herramienta para el estudio de la concavidad y convexidad:

Proposición 253.- Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si $f''(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es convexa en (a, b) .
- Si $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es cóncava en (a, b) .

Demostración:

Sea $x_0 \in (a, b)$, entonces: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(t)}{2!}(x-x_0)^2$ para un cierto t entre x y x_0 . Por tanto, si $f'' < 0$ en (a, b) ,

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)] = f''(t) \frac{(x-x_0)^2}{2!} \leq 0$$

luego f es convexa ya que ésto se dará para todo $x, x_0 \in (a, b)$, y significa que todos los puntos de la curva están por debajo de la tangente a la curva en cualquier punto $x_0 \in (a, b)$.

Análogamente, será cóncava si $f'' > 0$ en (a, b) . ■

EJEMPLO La función $f(x) = x^2$ es cóncava en todos los puntos, pues $f''(x) = 2 > 0$. Análogamente, $f(x) = -x^2$ es convexa en todo \mathbb{R} . △

Corolario 254.- Si $f''(x)$ existe en un entorno de x_0 y es continua en x_0 , entonces una condición necesaria para que x_0 sea un punto de inflexión de f es que $f''(x_0) = 0$.

Demostración:

Si x_0 es un punto de inflexión de f , entonces:

Si f es cóncava a la derecha de x_0 (luego $f''(x) > 0$ en (x_0, b)), será convexa a la izquierda de x_0 (luego $f''(x) < 0$ en (a, x_0)), y viceversa.

Como f'' es continua en x_0 , se tiene que $\lim_{x \rightarrow x_0} f''(x) = f''(x_0)$ de donde puede concluirse que $f''(x_0) = 0$. ■

EJEMPLO $f(x) = x^3$ presenta un punto de inflexión en $x = 0$, pues es \mathcal{C}^2 en \mathbb{R} y $f''(x) = 6x$ se anula en $x = 0$, por lo que verifica la condición necesaria. Como es continua en 0 y $f'' < 0$ en $(-\infty, 0)$ y $f'' > 0$ en $(0, \infty)$ es punto de inflexión. △

11.2.1 Representación de funciones en forma explícita: $y = f(x)$

Dada una función $y = f(x)$, nos proponemos hacer su estudio y representación gráfica. Para ello se deben estudiar en términos generales los siguientes aspectos:

- 1.- Dominio y continuidad de la función.
- 2.- Simetrías (par e impar) y periodicidad.

Definición 255.- Una función f se dice **par** si $f(-x) = f(x)$ (f simétrica respecto al eje OY).
Una función f se dice **impar** si $f(-x) = -f(x)$ (f simétrica respecto al origen $(0, 0)$).

Definición 256.- Una función f se dice **periódica** de periodo T , si T es el menor número real tal que $f(x + T) = f(x)$, $\forall x$.

- 3.- Comportamiento asintótico.
- 4.- Derivabilidad de la función.
- 5.- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- 6.- Extremos locales y globales.

Generalmente, al estudiar una función f sobre un conjunto A va a interesar conocer los valores más extremos que puede tomar f en la totalidad del conjunto A , es decir, el máximo global y el mínimo global. Estos extremos globales (también llamados **extremos absolutos**) pueden existir o no, según sean f y A ; sin embargo el teorema de Weierstrass (Th. 222) garantiza, bajo ciertas condiciones su existencia.

Es claro que los extremos globales han de buscarse entre los extremos locales y los posibles valores de f en la frontera de A .

- 7.- Intervalos de concavidad y convexidad.
- 8.- Puntos de inflexión.

11.2.2 Estudio de curvas dadas en forma paramétrica y polar

11.2.2.1 Curvas dadas en forma paramétrica: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Dadas $\varphi, \psi: A \rightarrow \mathbb{R}$, si consideramos los puntos del plano de la forma $(\varphi(t), \psi(t))$, para cada valor $t \in A$, estaremos representando sobre el plano real una curva. Se dice que la curva viene dada por sus **ecuaciones paramétricas**

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ y al valor t se lo denomina **parámetro**.

Si la función $x = \varphi(t)$ admite inversa, $t = \varphi^{-1}(x)$, entonces y se podrá escribir como función de x , $y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$ y tendremos la curva representada por una función en forma explícita.

En general, aunque $x = \varphi(t)$ no admita inversa para todo t , si admitirá inversa por “trozos” (al menos siempre que $\varphi'(t) \neq 0$, por el Teorema de la función inversa), luego podremos suponer que a la curva en paramétricas se le puede asociar, por trozos, alguna función en forma explícita.

Entonces, para estudiar una curva dada en paramétricas podemos usar los resultados conocidos para la forma explícita. En efecto, supuesto $y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$, se tiene que

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \text{ si se cumple que } \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = x_0 \text{ y } \lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = y_0$$

$$\star f'(x) = \psi'[\varphi^{-1}(x)] \cdot (\varphi^{-1})'(x) = \psi'(t)(\varphi^{-1})'(x) = \psi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$\star f''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right] \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right] (\varphi^{-1})'(x) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^2} \frac{1}{\varphi'(t)}$$

luego todos los conceptos y resultados tratados para la representación en explícitas son estudiados para las paramétricas: continuidad, asíntotas, monotonía, extremos, convexidad, etc.

11.2.2.2 Curvas dadas en coordenadas polares

Sean O un punto del plano, al que llamaremos **polo**, y una semirrecta, llamada **eje polar**, que tiene su origen en O . La posición de un punto cualquiera P del plano se determina por dos números: r y θ ; el primero de ellos indica la distancia del punto P al polo y el segundo el ángulo formado por el eje polar y la recta OP . Los números r y θ se denominan **coordenadas polares** del punto P . Si θ varía entre 0 y 2π , a todo punto P distinto de O le corresponde un par, bien determinado, de números r y θ . El polo es el único punto cuyo r vale 0 , aunque θ no está determinado.

Una **curva en coordenadas polares** es una curva en el plano descrita por una ecuación $r = f(\theta)$, una vez fijados el polo y el eje polar.

Si tomamos el $\mathbf{0} = (0, 0)$ como polo y el semieje de abscisas positivo como eje polar, cada punto (x, y) del plano viene descrito por las ecuaciones $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, por lo que para un estudio exhaustivo de una curva en

polares $r = f(\theta)$, podemos realizar el estudio de la curva en paramétricas dada por $\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$. Aunque para una representación sencilla de la curva basta la propia definición de las coordenadas polares como distancia al polo y ángulo recorrido.

11.3 Ejercicios

11.137 Escribir cada uno de los polinomios $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ y $Q(x) = 2x^3 - 6x^2 + 8$ en potencias de $x - 2$ y en potencias de $x + 1$.

11.138 Construir un polinomio de grado menor o igual que 10 que verifique: $P(7) = 1$, $P'(7) = 2$, $P''(7) = -3$, $P^{(3)}(7) = \dots = P^{(8)}(7) = 0$, $P^{(9)}(7) = -1$, $P^{(10)}(7) = 5$. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto de abscisa $x = 9$.

11.139 Probar que β es una raíz de multiplicidad m del polinomio $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ si, y sólo si $P(\beta) = P'(\beta) = P''(\beta) = \dots = P^{(m-1)}(\beta) = 0$ y $P^{(m)}(\beta) \neq 0$.

11.140 Hallar los polinomios de Taylor de grado 4 de las funciones siguientes en los puntos indicados:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $f(x) = \frac{2}{3-x}$ en $\alpha = 1$ | b) $f(x) = \cos x$ en $\alpha = \frac{\pi}{2}$ | c) $f(x) = \ln x$ en $\alpha = 1$ |
| d) $f(x) = e^x$ en $\alpha = -1$ | e) $f(x) = \operatorname{tg} x$ en $\alpha = 0$ | f) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ en $\alpha = 1$ |

11.141 Construir la fórmula de Taylor para el polinomio de grado 4 de $f(x) = \sqrt{3+x}$ en el punto 1 y obtener una cota del error cometido al aproximar el valor $\sqrt{5}$ mediante el polinomio de Taylor de orden 4.

11.142 Construir la fórmula de MacLaurin de $f(x) = e^x$. Si aproximo el valor de e^{-1} mediante un polinomio de MacLaurin ¿qué grado tendrá que tener al menos, para que el error cometido sea menor que una diezmilésima (10^{-4})?

11.143 Construir la fórmula de Taylor de $f(x) = \ln x$ en el punto 1. Dar el valor aproximado de $\ln \frac{3}{2}$, con un error menor que una diezmilésima.

11.144 Considerar los polinomios de MacLaurin de grado 4 de las funciones e^x , $\sen x$, $\cos x$, $x(1-x)$, $\sqrt{1+x}$ y $\ln(1+x)$. Usar las operaciones con los polinomios de Taylor, para calcular los polinomios de MacLaurin de grado 4 de:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \sen x + \cos x & \text{b)} & e^x \ln(1+x) & \text{c)} & x(1-x) \ln(1+x) & \text{d)} & x(1-x) + e^x \\ \text{e)} & \frac{1}{\sqrt{1+x}} & \text{f)} & \frac{x(1-x)}{\sqrt{1+x}} & \text{g)} & \frac{\sen x}{e^x} + \ln(1+x) & \text{h)} & \frac{\sen^2 x}{\sqrt{1+x}} + \frac{\cos^2 x}{e^x} \end{array}$$

11.145 Usar los desarrollos limitados (polinomios de Taylor) de las funciones f y g en los puntos que se indican, para encontrar los polinomios de Taylor de la composición pedidos:

- $f(x) = x^2$ en $\alpha = 0$ y $g(y) = e^y$ en $\beta = 0$, hallar el de $g \circ f$ en $\alpha = 0$ de grado 8.
- $f(x) = 1-x$ en $\alpha = 1$ y $g(y) = \ln(1-y)$ en $\beta = 0$, hallar el de $g \circ f$ en $\alpha = 1$ de grado 5.
- $f(x) = 2x$ en $\alpha = 0$ y $g(y) = \sen y$ en $\beta = 0$, hallar el de $g \circ f$ en $\alpha = 0$ de grado 7.
- $f(x) = x^2$ en $\alpha = 0$ y $g(y) = (1+y)^{\frac{1}{2}}$ en $\beta = 0$, hallar el de $g \circ f$ en $\alpha = 0$ de grado 6.
- $f(x) = x^2 + 4x + 5$ en $\alpha = -2$ y $g(y) = \ln y$ en $\beta = 1$, hallar el de $g \circ f$ en $\alpha = -2$ de grado 6.

11.146 Hallar los 4 primeros términos (no nulos) de los polinomios de Taylor de:

$$\text{a)} \quad \sqrt{2+x^2} \quad \text{en } \alpha = 0 \qquad \text{b)} \quad \frac{1}{x(1+x)} \quad \text{en } \alpha = 1 \qquad \text{c)} \quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{en } \alpha = 0$$

11.147 Probar que si $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n de f en α , entonces $f(x) - f(\alpha)$ y $P_n(x) - f(\alpha)$ son infinitésimos equivalentes cuando $x \rightarrow \alpha$.

[Nota: De hecho, para los infinitésimos conocidos se ha tomado el término de menor grado de $P_n(x) - f(\alpha)$]

11.148 Hallar polinomios que sean infinitésimos equivalentes de las funciones:

$$\text{a)} \quad \sqrt{1-x} - 1 \quad \text{cuando } x \rightarrow 0 \qquad \text{b)} \quad 1 - \sen x \quad \text{cuando } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \qquad \text{c)} \quad \frac{1}{x} - 1 \quad \text{cuando } x \rightarrow 1$$

11.149 Usar los polinomios de Taylor del grado necesario para calcular:

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2+\cos x) - 3 \sen x}{x^5} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x - \tg x}{x^3} \qquad \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{2(1-\ch x)}{x^3} \right)$$

11.150 ¿Para qué valores de a y de b es finito el límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+a \cos x) - b \sen x}{x^3}$?

11.151 Hallar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x - \tg x}{x^n} = k \neq 0$ y finito.

11.152 Encontrar a y b para qué $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1+ax}{1+bx}}{x^3}$ sea finito.

11.153 Encontrar a y b para que $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{x(2+ax^2)}{1+bx^2}$ sea equivalente a $\frac{8x^7}{175}$ cuando x tiende a cero.

11.154 Encontrar una función equivalente, cuando $x \rightarrow 0$, a la función: $g(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} - 1$ y deducir que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

11.155 Encontrar una función equivalente a la función $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} - \frac{3}{2}$ cuando x tiende a 2.

11.156 Probar que $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ no tiene ninguna raíz real.

11.157 Se considera la función $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$ definida en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

- a) Probar que se pueden dar valores a $f(0)$ y a $f(1)$ para que la función sea continua en 0 a la derecha y para que f sea continua y derivable en 1.
- b) ¿Qué vale en 0 la derivada por la derecha supuesto dado a $f(0)$ el valor del apartado anterior?.

11.158 Dada la función $f(x) = \frac{xe^x}{|e^x - 1|}$.

- a) Definir la función f en el punto $x = 0$ de forma que f sea continua en dicho punto, si ello es posible.
- b) Hallar las asíntotas de f .

11.159 Para las siguientes funciones, encuentra todas sus asíntotas e indica, mediante un esbozo gráfico, cómo se aproxima la función a ellas.

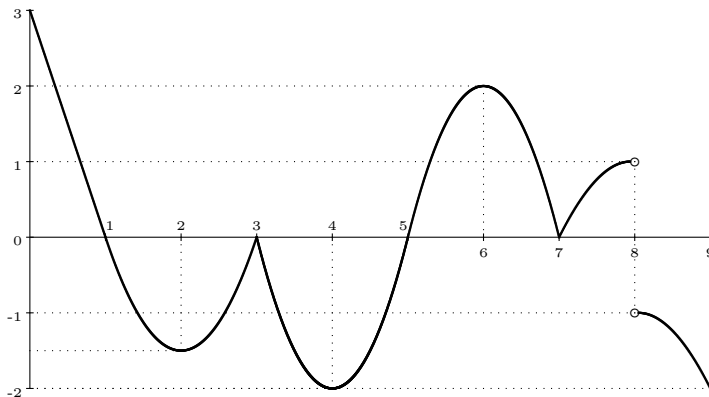
- a) $f(x) = \frac{x-1}{(x^2+4x)^2}$
- b) $f(x) = \frac{(2x^2-2\sqrt{2}x+1)^2}{x^3-x}$
- c) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$
- d) $f(x) = \frac{x^3}{3x^2-2} - \frac{1}{x}$
- e) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
- f) $f(x) = x \operatorname{tg} x$

11.160 Encuentra todas las asíntotas de las funciones siguientes:

- a) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$
- b) $f(x) = \frac{4}{2-\ln(x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2})}$
- c) $f(x) = \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^2-1}}$
- d) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

11.161 Estudia las simetrías y periodicidad de las funciones de los ejercicios 11.159 y 11.160 anteriores.

11.162 Sea $f: [0, 9] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $f': (0, 8) \cup (8, 9) \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por la gráfica de abajo,



Estudiar: intervalos de monotonía y concavidad, puntos críticos y de inflexión de la función f (supondremos que existe f'' en los puntos donde lo parece).

Representar aproximadamente la gráfica de f suponiendo $f(x) \geq 0$.

¿Cuál es el dominio de f'' y qué se puede decir de ella?

11.163 Estudiar las funciones siguientes y construir sus gráficas

- a) $f(x) = (x-1)^2(x-2)$
- b) $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{8+2x-x^2}$
- c) $f(x) = 4-x^2(x+2)^2$
- d) $f(x) = x-2 \operatorname{arctg} x$
- e) $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$
- f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-x}$
- g) $f(x) = \frac{x^5-10x^3+20x^2-15x+4}{32}$
- h) $f(x) = \frac{3+x^4}{x^3}$
- i) $f(x) = \frac{2x^2+3x-4}{x^2}$
- j) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$
- k) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$
- l) $f(x) = \frac{x^2}{2} \ln |x|$
- m) $f(x) = \operatorname{sen}(3x) - 3 \operatorname{sen} x$
- n) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$
- o) $f(x) = e^{-2x} \operatorname{sen}(2x)$

11.164 Estudiar la función $f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^5}{(x+1)^2}}$ y construir su gráfica.

11.165 Dada la función $f(x) = \arcsen \frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$, se pide:

- a) Dominio y continuidad de f .
- b) ¿Tiene asíntotas?
- c) Ver que f no es derivable en $x = 1$. Hallar la derivada a la derecha y a la izquierda del punto $x = 1$.
- d) Estudiar crecimiento y decrecimiento, extremos locales y globales de f .
- e) Estudiar concavidad y los puntos de inflexión de f .
- f) Representación gráfica de f y de f' .